
УДК 534.014

Особенности оценки зазора в модельной задаче подбрасывания материальной частицы с неудерживающими связями

Елисеев С.В., Елисеев А.В., Кашуба В.Б.

В статье представлены результаты исследования механических систем с неудерживающими связями. Рассмотрена модельная задача подбрасывания материальной частицы на горизонтальной поверхности с неудерживающими связями при наличии гравитационных сил. Исследованы длительность и высота полета материальной частицы в зависимости от частоты и амплитуды колебания поверхности. Получены оценки зазора между материальной частицей и поверхностью колебания. Представлены аналитические соотношения на частоту и амплитуду колебания поверхности, которые обеспечивают заданные высоту или время полета материальной частицы. Представлены предельные характеристики процесса подбрасывания. Предложены ограничения на параметры математической модели, учитывающие физические характеристики поверхностей, и способы модификации исходной математической модели. Представленная методологическая основа может быть использована для исследования режимов непрерывного подбрасывания с учетом дополнительной постоянной силы.

Ключевые слова: неудерживающие связи, взаимодействие материальной частицы с вибрирующей поверхностью, режим подбрасывания в одно касание, кратный режим подбрасывания, зазор, высота подбрасывания, время подбрасывания, отрыв частицы от поверхности.

Features of gap estimation in model problem of flipping particle with unilateral constraints

Eliseev S.V., Eliseev A.V., Kashuba V.B.

The article presents the research results of mechanical systems with unilateral constraints. The model problem of flipping a particle on a horizontal surface with unilateral constraints under gravitation is considered. The research deals with the time and height of the particle reaching the surface in accordance with the surface frequency and vibration amplitude. The estimation of the gap between the material particle and the vibration surface is obtained. The paper presents analytical ratios of frequency and the surface vibration amplitude that provide a predetermined height or the reaching time of the material particle. A number of maximum flipping characteristics are given. The paper discusses restrictions on the mathematical model parameters, based on the surface physical characteristics and the ways to modify the original mathematical model. The methodological framework can be used in the research of continuous flipping mode, taking into consideration some additional constant force.

Keywords: unilateral constraints, the interaction of a particle with the vibrating surface, one-touch flipping mode, multiple flipping mode, the gap between particle and surface, flipping height, flipping time, the particle take-off.

Введение

Необходимость исследования процесса динамического взаимодействия материального объекта с вибрирующей поверхностью возникает при решении задач в актуальных отраслях современной экономики: промышленности, сельском хозяйстве, транспорте. В связи с обеспечением безопасности перевозки грузов важными являются исследования взаимодействия твердого тела с вибрирующей поверхностью при наличии неудерживающих связей.

Изучение обозначенных динамических процессов проводилось в значительном числе работ по теоретической [1] и аналитической механике [2], теории механизмов и машин [3], теории вибрационного переноса [4]. Ряд вопросов, касающихся контактного взаимодействия, движения с подбрасыванием, периодических безударных движений в системах с неудерживающими связями отражен в работах [5-8]. В работе [9] приведены условия отрыва, условия существования режима с

кратным подбрасыванием, представлены аналитические выражения основных характеристик отрыва и режимов кратного подбрасывания.

Несмотря на то, что многие вопросы взаимодействия материальной частицы и поверхности достаточно глубоко исследованы, ряд вопросов не получил должного развития. В частности, мало изученными оказались зависимости высоты и времени подлета от амплитуды и частоты, не определены диапазоны используемых параметров системы, которые обеспечивают соответствие модели физическим представлениям.

Цель работы – получить аналитическое представление о высоте и длительности подлета для предельных случаев изменения параметров колебания поверхности, охарактеризовать соответствие исходной модели физическим представлениям.

Общие положения и постановка задачи

Рассматривается гармоническое колебание горизонтальной поверхности $H(t)=A\sin(\omega t)$, на которой лежит материальная частица некоторой массы m . На частицу действует сила тяжести Q . Связь между частицей и поверхностью полагается неустойчивой. Расчетная схема представлена на рисунке 1.

При определенных параметрах колебания поверхности возможен отрыв частицы. Характерная траектория подбрасывания S формируется из двух стадий. На рисунке 2 представлена траектория подбрасывания частицы с перелетом через один период.

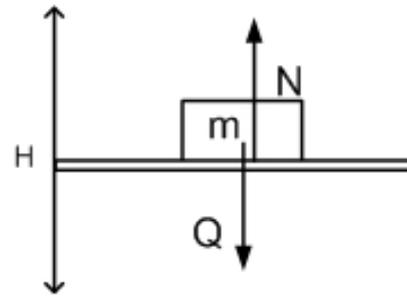


Рис. 1. Расчетная схема для стадии контакта материальной частицы m с поверхностью H .

N - реакция опоры, Q -сила тяжести.

В стадии контакта с поверхностью силы, действующие на частицу, определяются на основе принципа Даламбера:

$$m\ddot{S} = N + Q. \quad (1)$$

Условия отрыва определяются из (1) в момент времени, когда реакция опоры N принимает нулевое значение:

$$N(t) = m\ddot{S} - Q = 0. \quad (2)$$

В стадии подлета траектория движения частицы определяется системой дифференциальных уравнений с начальными условиями, которые сформированы в момент отрыва частицы от поверхности:

$$\begin{cases} \ddot{S}(t) = -g, t \geq t_0 \\ \dot{S}(t_0) = \dot{H}(t_0) \\ S(t_0) = H(t_0) \end{cases} \quad (3)$$

Траектория подлета частицы имеет вид:

$$S(t) = A\sin(\omega t_0) + A\omega(t - t_0)\cos(\omega t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2. \quad (4)$$

Процесс подбрасывания материальной частицы формируется сменой стадий контакта и

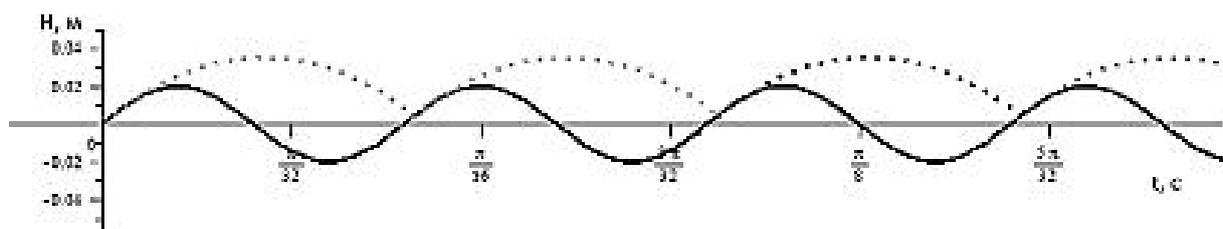


Рис. 2. Характерная траектория подбрасывания материальной частицы.

зазора между поверхностью. Рассматривается режим кратного подбрасывания, когда период подлета частицы превышает период колебания поверхности в целое число раз. Условие подбрасывания кратности k имеет вид:

$$S(t)|_{t=t_0} = S(t)|_{t=t_0 + \frac{2\pi k}{\omega}}. \quad (5)$$

Предлагается оценка величины зазора и характеристики процесса подбрасывания в зависимости от амплитуды и частоты колебания поверхности, в том числе, определение предельных значений рассматриваемых величин.

Оценка зазора для режима кратного подбрасывания

Траектория движения материальной частицы для режима с кратным подбрасыванием определяется из системы дифференциальных уравнений (3), условий отрыва в момент времени t_0 (2) и условий реализации режима подбрасывания с кратным периодом подбрасывания (5).

Величина зазора R представляет собою расстояние между материальной частицей и точкой поверхности колебания. Высота подлета может быть получена из закона изменения кинетической энергии [1] в виде

$$S_{\max} = A \sin(\omega t_0) + \frac{(A\omega \cos(\omega t_0))^2}{2g}. \quad (6)$$

В результате величина зазора оценивается через величину высоты подлета и амплитуду колебания поверхности:

$$S(t) - A \leq R(t) \leq S(t) + A. \quad (7)$$

Величину максимального зазора можно оценить с учетом выражений (6) и (7):

$$R(t) \leq 2A + \frac{(A\omega)^2}{2g}.$$

Характеристики параметров процесса кратного подбрасывания

В сочетании с условиями отрыва в точке (2), условие кратности режима (5) может быть представлено в виде:

$$\frac{A\omega^2}{g} = \sqrt{1 + \pi^2 k^2}. \quad (8)$$

Данное выражение устанавливает взаимосвязь между амплитудой, частотой колебания поверхности и кратностью режима подбрасывания. Задание двух параметров однозначно позволяет определить третий. При фиксированной кратности подбрасывания и частоте колебания однозначно определяется амплитуда колебания:

$$A_k = \frac{g}{\omega^2} \sqrt{1 + \pi^2 k^2}. \quad (9)$$

Аналогично, при фиксированной кратности и амплитуде колебания однозначно определяется частота колебания:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{g}{A} \sqrt{1 + \pi^2 k^2}}. \quad (10)$$

Заданная кратность k позволяют определить возможные параметры колебания поверхности, которые обеспечивают реализацию соответствующего режима с кратным подбрасыванием.

Длительность зазора определяется условиями кратности периода. Выражение частоты (10) и амплитуды (9) позволяет определить зависимость периода бесконтактного подлета при фиксированной амплитуде или частоте от кратности подбрасывания:

$$T_k(A) = \sqrt{\frac{A}{g} \frac{2\pi k}{\sqrt{1 + \pi^2 k^2}}}, T_k(\omega) = \frac{2\pi k}{\omega}.$$

Заданное время существования зазора позволяет определить множество частот и амплитуд, которые обеспечивают соответствующее время бесконтактного подбрасывания частицы. При этом предполагается, что время контакта является бесконечно малой величиной, хотя в динамической системе этого не происходит.

Пусть заданное время, которое частица должна находиться в подлете над поверхностью при реализации режима кратности k , равно T . При этом частота и амплитуда колебания будут составлять:

$$\omega = \frac{2\pi k}{T}, \quad A = \frac{gT^2}{4\pi^2 k^2} \sqrt{1 + \pi^2 k^2}.$$

На рисунке 3 представлены амплитуды колебаний поверхности для диапазона частот до 600 рад/с, которые обеспечивают длительность подлета частицы в 1 с.

При фиксированной частоте колебания отношение времени подлета при режиме кратности один по отношению к длительности подлета кратности k получаются путем соответствующей подстановки:

$$\tau_k(\omega) = \frac{T_1(\omega)}{T_k(\omega)} = \frac{1}{k}.$$

При фиксированной амплитуде колебания отношение периодов длительности подбрасывания принимает вид:

$$\tau_k(A) = \frac{T_1(A)}{T_k(A)} = \frac{1}{k} \sqrt[4]{\frac{1 + \pi^2 k^2}{1 + \pi^2}}. \quad (11)$$

На рисунке 4 представлены графики функций $\tau_k(\omega)$ и $\tau_k(A)$. Из рисунка видно, что с ростом кратности режима подбрасывания при фиксированном одном из двух параметров колебания происходит неограниченный рост времени подлета.

Выражение высоты подлета для произвольного режима с отрывом при подстановке выражений частоты и амплитуды позволяет выразить высоту подлета для режима с кратным периодом подбрасывания.

Высота максимального подлета частицы при режиме кратности k при фиксированной частоте имеет вид:

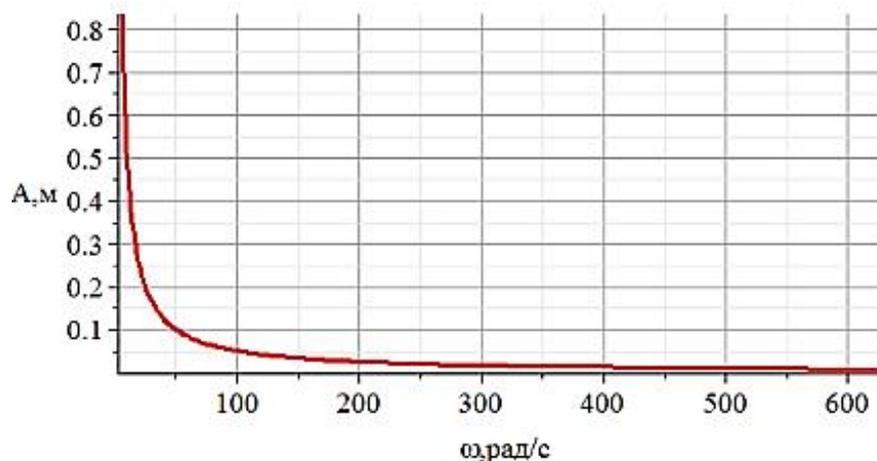


Рис. 3. Зависимость между частотами и амплитудами, которые обеспечивают время подлета $T=1$ с.

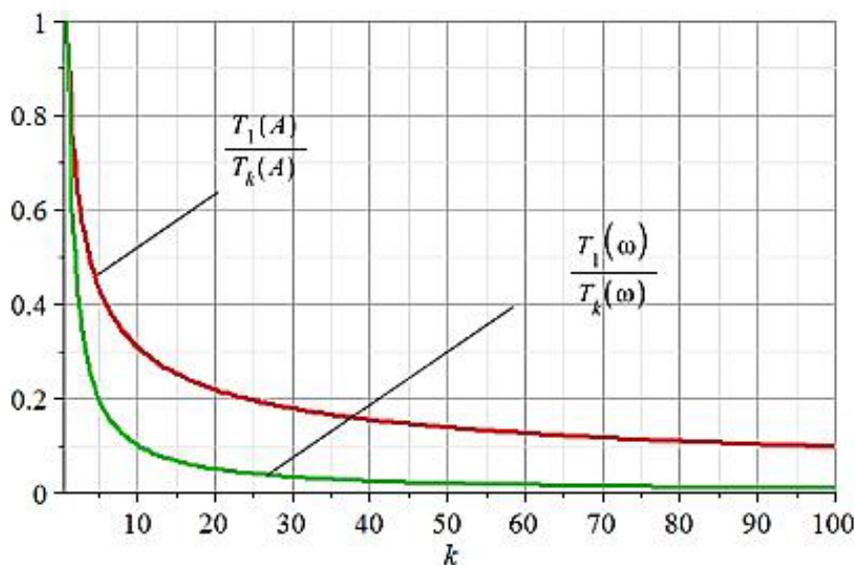


Рис. 4. Отношение времени подлета для различных k .

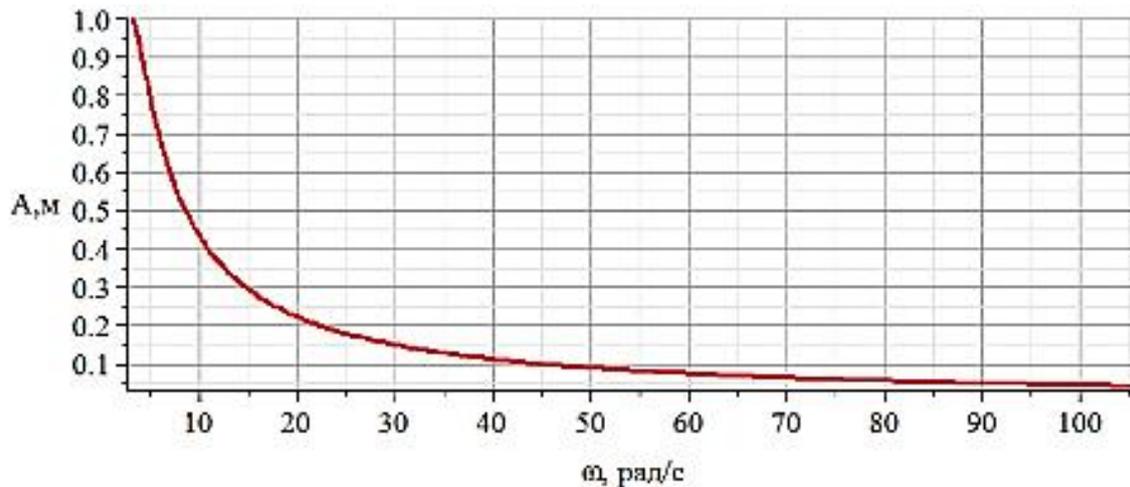


Рис. 5. Значения амплитуд и частот, которые обеспечивают подбрасывание частицы на высоту 1 м.

$$S_{k,\max}(\omega) = \frac{g}{\omega^2} \left(1 + \frac{\pi^2 k^2}{2} \right).$$

Высота максимального подлета частицы при режиме кратности k при фиксированной амплитуде имеет вид соответственно:

$$S_{k,\max}(A) = \frac{2 + \pi^2 k^2}{2\sqrt{1 + \pi^2 k^2}} A.$$

Полученные выражения позволяют определить теоретически возможные режимы с подбрасыванием, которые обеспечивают подлет частицы на фиксированную высоту.

Пусть задана максимальная высота подлета частицы S . Если данная высота подлета достигается при режиме с кратностью k , то соответствующие амплитуда и частота имеют вид:

$$A = 2S \frac{\sqrt{1 + \pi^2 k^2}}{2 + \pi^2 k^2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{S}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \pi^2 k^2}.$$

На рисунке 5 представлены значения амплитуд колебания поверхности в диапазоне частот до 100 рад/с, которые обеспечивают подлет частицы на высоту 1 м.

Относительное изменение высоты подлета с ростом кратности режима с фиксированной частотой имеет вид:

$$v_k(\omega) = \frac{S_{1,\max}(\omega)}{S_{k,\max}(\omega)} = \frac{2 + \pi^2}{2 + \pi^2 k^2}. \quad (12)$$

Относительное изменение высоты подлета с ростом кратности режима при фиксированной амплитуде колебания имеет вид:

$$v_k(A) = \frac{S_{1,\max}(A)}{S_{k,\max}(A)} = \frac{2 + \pi^2}{2 + \pi^2 k^2} \sqrt{\frac{1 + \pi^2 k^2}{1 + \pi^2}}.$$

Ограничения на параметры модели

Представленные аналитические соотношения позволяют теоретически рассматривать модель в неограниченном диапазоне параметров. С одной стороны, отсутствие учета конструктивных особенностей механической системы позволяет утверждать, что с ростом частоты и амплитуды колебания можно добиться сколько угодно большого подлета частицы или сколь угодно большой длительности подлета. С другой стороны, при стремлении амплитуды колебания к нулю, воздействие поверхности на подбрасываемую материальную частицу должно приближаться к воздействию неподвижной поверхности на частицу. Для устранения противоречия предлагается определить границы области, соответствующие конструктивным особенностям механической системы, и модифицировать исходную модель так, чтобы движение частицы для предельных режимов отвечало необходимому характеру взаимодействия.

В качестве величин, которые ограничивают области изменения амплитуды и частоты, предлагается использовать характеристики механических систем и их составляющих элементов. Минимальная величина амплитуды должна превышать, как минимум, на по-

рядок максимально допустимую величину неровности самой поверхности. В противном случае, движение поверхности уже нельзя считать гармоническим по причине внесения случайных помех, вызванными этими неровностями. Основываясь на значениях параметров шероховатости, к примеру, для второго класса шероховатости [10] можно полагать в качестве минимально допустимой амплитуды колебания величину 1 мм. Ограничения накладываются и на максимально допустимую частоту колебания поверхности. В качестве максимальной частоты колебания поверхности с амплитудой колебания 1 мм предлагается рассматривать 50 Гц.

Модификация исходной математической модели

Одним из вариантов модификации исходной модели является добавление показателя длительности отрыва. Модифицированная модель будет учитывать тот факт, что отрыв происходит не мгновенно, а в течение некоторого малого фиксированного промежутка времени. В таком предположении после прохождения момента реакции опоры равной нулю, частица ещё некоторое время лежит на поверхности, а потом отрывается от поверхности со скоростью, сформированной новым моментом отрыва. Такая модель отрыва существенно влияет на высоту подлета материальной точки при отрыве. Можно показать, что с ростом частоты колебания поверхности частица перестанет отрываться от поверхности. Но с превышением частоты определенного критического значения опять возникнет отрыв. Можно показать, что в модифицированной модели отношения высот и времени подлета, аналогичные выражениям (11) и (12) исходной модели будет стремиться к нулю.

Заключение

Проведенный анализ предельных значений параметров амплитуды и частоты позволяет сделать следующие выводы:

1. Исходная модель требует определения границ изменения допустимых частот и амплитуд. В качестве таких ограничений могут быть предложены конструктивные характеристики поверхности колебания.

2. Введение в математическую модель параметра запаздывания отрыва изменяет процесс подбрасывания материальной частицы и условие реализации режима кратного подбрасывания.

3. Максимальная высота и время подлета частицы для режима кратного подбрасывания при отрыве с запаздыванием определяются соотношением между временем запаздывания и периодом колебания поверхности.

Литература

1. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики: в 2 т. Т 2 Динамика / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Наука, 1968. – 638 с.

2. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1986. – 516 с.

3. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – М.: Наука, 1978. – 640 с.

4. Блехман И.И., Джаналидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение / И.И. Блехман, Г.Ю. Джаналидзе. – М.: Наука, 1968. – 316 с.

5. Сельвинский В.В. Динамика контактного взаимодействия твердых тел. – Благовещенск: Изд-во Амурского государственного университета. 2009. – 164 с.

6. Елисеев С.В., Марков К.К. Некоторые вопросы динамики колебательного процесса при неударивающих связях // Механика и процессы управления. – Иркутск: ИПИ. 1971. – С. 71-83.

7. Елисеев С.В., Лоткин О.И. Условия существования и нарушения контакта для систем с неударивающими связями // Труды ОМИИТа. Вып. 69. – Омск: ОМИИТ, 1966. – С. 93-99.

8. Горбиков С.П., Неймарк Ю.И. Основные режимы движения при вибротранспорти-

ровании с подбрасыванием // Изв. АН СССР «Механика твердого тела», № 4, 1981. – С. 39-50.

9. *Елисеев С.В., Елисеев А.В.* Режимы подбрасывания материальной частицы на вибрирующей поверхности в модельной задаче с неудерживающими связями. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012, №3(35). – С. 64-75.

10. *Серебренницкий П.П.* Общетеchnический справочник. // П.П. Серебренницкий. – СПб: Политехника. 2004. – 445 с.

References

1. *Loytsyanskiy L.G.* The course of theoretical mechanics: in 2 vol. Vol. 2. Dynamics / Loytsyanskiy L.G., Lurie A.I. – Moscow: Nauka, 1968. – 638 p.

2. *Lurie A.I.* Analytical Mechanics. – Moscow: Nauka, 1986. – 516 p.

3. *Artobolevskiy I.I.* Theory of mechanisms and machines. – Moscow: Nauka, 1978. – 640 p.

4. *Blechman I.I., Dzhanalidze G.Y.* Vibratory movement. – Moscow: Nauka, 1968. – 316 p.

5. *Selvinskiy V.V.* The dynamics of the contact interaction of solids. – Blagoveshchensk: Publishing House of the Amur State University, 2009. – 164 p.

6. *Eliseev S.V., Markov K.K.* Some aspects of the dynamics of the oscillatory process with unilateral constraints // Mechanics and Control. – Irkutsk: IPI, 1971. – P. 71-83.

7. *Eliseev S.V., Lotkin O.I.* The conditions of existence and loss of contact for systems with unilateral constraints // Proceedings of the ОМИТа. Vol. 69. – Omsk ОМИТ, 1966. – P. 93-99.

8. *Gorbikov S.P., Neumark Y.I.* The main modes of motion in vibro-tossing // Math. Academy of Sciences of the USSR, Mechanics of Solids, № 4, 1981. – P. 39-50.

9. *Eliseev S.V., Eliseev A.V.* Modes flip of a particle on a vibrating surface in the model problem with unilateral constraints // Modern technology. System analysis. Modeling. 2012, № 3 (35). – P. 64-75.

10. *Serebrenitskiy P.P.* General Technical Reference. – St. Petersburg: Polytechnic. 2004. – 445 p.

Статья поступила в редакцию 28 ноября 2012 г.

Елисеев Сергей Викторович – доктор технических наук, профессор, директор НИИ «Современных технологий, системного анализа и моделирования» ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет путей сообщения». E-mail: eliseev_s@inbox.ru

Елисеев Андрей Владимирович – аспирант федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Иркутский государственный университет путей сообщения». E-mail: andrey.marketer@gmail.com

Кашуба Владимир Богданович – кандидат технических наук, доцент, директор технопарка Братского государственного университета. E-mail: plemja@rambler.ru

Eliseev Sergey Viktorovich – Professor, Irkutsk State University of Railway Transport. E-mail: eliseev_s@inbox.ru

Eliseev Andrey Vladimirovich – Graduate student, Irkutsk State University of Railway Engineering. E-mail: andrey.marketer@gmail.com

Kashuba Vladimir Bogdanovich – Ph.D., Bratsk State University. E-mail: plemja@rambler.ru