УДК 621.833.3

Расчет контактных напряжений сопрягаемых винтовых поверхностей

Лодыгина Н.Д.

В зоне контакта происходит концентрация напряжений, возникают объемные значительные напряжения и как следствие происходит локальное пластическое деформирование и разрушение. При расчете на прочность сопрягаемых винтовых поверхностей наибольший вклад в расчетные суммарные напряжения вносят контактные напряжения (до 80%). Определение номинальных контактных напряжений затруднено и расчеты выполняют методами теории упругости. В данной работе определены контактные напряжения с применением формул Герца в продольном сечении винта винтового механизма. Необходимость определения контактных напряжений в продольном сечении винта продиктовано сложением напряжений винта, витка и контактных напряжений (комплексная методика расчета напряженного состояния винтовых поверхностей). В качестве критерия контактной прочности берется критерий энергии формоизменения (четвертая теория прочности), применимость которой подтверждается экспериментальными данными. Предложенный метод расчета контактных напряжений целесообразно распространить на все виды зубчатых передач с контактом в точке, в том числе, на расчет фрикционных передач.

Ключевые слова: контактные напряжения, контактная прочность, винтовая поверхность, нормальные напряжения, касательные напряжения, критерий прочности энергии формоизменения.

Calculations of contact stresses of mating screw surfaces

Lodigina N.D.

Due to stress concentration in the contact area, there is a great deal of strain, which results in the local plastic deformation and destruction. Contact stresses take up some 80% of the total amount of stresses in strength estimation of screw mating surfaces. It is difficult to determine nominal contact stresses, so the calculations are performed by the elasticity theory methods. The contact stresses have been calculated by Hertz formulas in the longitudinal screw cross-section of a screw mechanism. The need to calculate contact stresses in the longitudinal screw cross-section is caused by total stresses of the screw, coil and contact stresses (a complex calculation technique of the stress state screw surfaces). Energy deformation analysis (the fourth theory of strength) is used as the contact strength criterion; its applicability has been proved by the experimental data. It is advisable to apply this contact stress calculation technique to all types of point-contact gearing as well as friction gearing.

Keywords: contact stresses, the contact strength, spiral surface, tangential stresses, the strength criterion of modification energy.

Введение

На несущую способность области контакта действуют такие факторы как скольжение профилей, смазочный материал, коэффициент трения, шероховатость поверхности, касательные напряжения, причем влияние отмеченных факторов неодинаково на сопряженных поверхностях. В этой области имеются значительные успехи как у нас в стране, так и за рубежом, но пока еще не удалось обобщить и увязать эти результаты с теорией усталостных повреждений сопряженных поверхностей и получить надежные зависимости для расчета как зубьев, так и витков винтовых механизмов. Учитывая, что контактные давления существенно влияют на выносливость контактирующих поверхностей, расчет по формулам Герца сохранен в современных методиках расчета.

В качестве критерия контактной прочности берется критерий энергии формоизменения (четвертая теория прочности), применимость которой подтверждается экспериментальными данными.

Цель работы – рассмотреть вопросы определения контактных напряжений с применением формул Герца в продольном сечении винта винтового механизма.

Расчет контактных напряжений

При комплексном расчете напряженного состояния деталей винтовых механизмов необходимо учитывать деформации контакта, изгиба, кручения, среза, растяжения (сжатия) [2]. В теории упругости на основе решения Герца контактной задачи дается распределение напряжений, возникающих в полупространстве, нагруженном давлением, произвольным образом, распределенным по поверхности эллиптической площадки. Согласно этому решению главные напряжения σ_{x1}, σ_{y1}, σ_{z1} (начало координат – в центре контакта, оси X_1, Y_1 совпадают соответственно с большей и меньшей осями симметрии эллиптической площадки, а ось Z_1 – с направлением равнодействующей контактной нагрузки) определяются следующим образом

$$\sigma_{x1}^{H}=-p_0\frac{\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}\left\{\begin{array}{l}1-\sqrt{\dfrac{\frac{b^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}}{1+\frac{z^2}{a^2}}}+2\dfrac{z}{a}(L-K)-\\ -2\mu\left[\begin{array}{l}1-\dfrac{a^2}{b^2}\sqrt{\dfrac{\frac{b^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}}{1+\frac{z^2}{a^2}}}+\\ +\dfrac{z}{a}\left(\dfrac{a^2}{b^2}L-K\right)\end{array}\right]\end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\sigma_{y1}^{H}=-p_0\frac{\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}\left\{\begin{array}{l}-1+\dfrac{1+\frac{z^2}{a^2}\left(2\frac{a^2}{b^2}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}}}-\\ -2\dfrac{z}{a}\left(\dfrac{a^2}{b^2}L-K\right)+\\ +2\mu\left[1-\sqrt{\dfrac{\frac{b^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}}{1+\frac{z^2}{a^2}}}+\dfrac{z}{a}(L-K)\right]\end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\sigma_{z1}^{H}=-p_0\frac{1}{\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}}\sqrt{1+\frac{z^2}{b^2}}}. \quad (3)$$

Все три главных напряжения σ_{x1}^{H}, σ_{y1}^{H}, σ_{z1}^{H} выражены здесь как функции следующих величин: отношение полуосей a и b эллиптического контура площадки контакта, отношение глубины z_1 рассматриваемой точки к большой a или малой b полуоси и давления p_0 в центре площадки контакта. В выражения для напряжений σ_{x1}^{H} и σ_{y1}^{H} входит одна из упругих постоянных материалов – коэффициент Пуассона μ.

Эллиптические интегралы первого и второго родов $K(e,\psi)$ и $L(e,\psi)$ определяются по формулам

$$K(e,\psi)=\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

$$L(e,\psi)=\int_0^{\psi}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

где параметр $\psi=arctg\frac{z_1}{a}$; $e^2=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2$ – квадрат эксцентриситета контурного эллипса площадки контакта.

Размеры эллиптической площадки контакта:

$$a=n_a\sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{\eta F_n}{\sum k}},\quad b=n_b\sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{\eta F_n}{\sum k}}, \quad (4)$$

где a, b – соответственно большая и малая полуоси эллипса;

$\eta=\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}$ – упругая постоянная соприкасающихся тел;

μ_1, μ_2, E_1, E_2 – соответственно коэффициенты Пуассона и модули упругости первого и второго тел.

Главные кривизны соприкасающихся тел в точке первоначального контакта: для первого тела k_{11} и k_{12}, для второго тела k_{21} и k_{22}; главные кривизны положительны, если соответствующий центр кривизны расположен внутри рассматриваемого тела; сумма главных кривизн соприкасающихся тел

$$\sum k = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}\,. \qquad (5)$$

$$\Omega = \frac{1}{\sum k}\sqrt{\begin{aligned}&(k_{11}-k_{12})^2 + (k_{21}-k_{22})^2 + \\ &+ 2(k_{11}-k_{12})(k_{21}-k_{22})\cos 2\omega\end{aligned}}\,. \qquad (6)$$

Значения коэффициентов n_a и n_b в зависимости от аргумента даны в работе [4 с. 425 табл. 14]; здесь ω – угол между плоскостями кривизн k_{11} и k_{21}.

Определив по формулам (1–3) контактные напряжения необходимо перейти от осей X_1, Y_1, Z_1 по которым действуют напряжения σ_{x1}^H, σ_{y1}^H, σ_{z1}^H, к осям X, Y, Z. Переход от осей X_1, Y_1, Z_1 к осям X, Y, Z проведем в два этапа: на первом этапе переход осуществляется к напряжениям, действующим по площадкам элементарного параллелепипеда, находящегося в нормальном сечении витка; на втором этапе произведем переход от напряжений, действующих по площадкам элемента в нормальном сечении витка, к напряжениям, действующим в продольном сечении винта по осям X, Y, Z [3].

Согласно формулам [1] в нормальном сечении витка контактные напряжения по осям X_2, Y_2, Z_2 равны

$$\sigma_{x_2}^H = \sigma_{x_1}^H\,;$$

$$\sigma_{y_2}^H = \sigma_{y_1}^H \cos^2\alpha + \sigma_{z_1}^H \sin^2\alpha\,;$$

$$\sigma_{z_2}^H = \sigma_{y_1}^H \sin^2\alpha + \sigma_{z_1}^H \cos^2\alpha\,.$$

Можно проверить, правильно ли сделан переход от системы координат X_1, Y_1, Z_1 к координатам X_2, Y_2, Z_2.

Известно [1], что сумма нормальных напряжений по любым трем взаимно перпендикулярным элементарным площадкам есть величина постоянная, равная сумме главных напряжений

$$\sigma_{x_2}^H + \sigma_{y_2}^H + \sigma_{z_2}^H = \sigma_{x_1}^H + \sigma_{y_1}^H + \sigma_{z_1}^H\,. \qquad (7)$$

Определяем левую часть равенства (7)

$$\begin{aligned}&\sigma_{x_2}^H + \sigma_{y_2}^H + \sigma_{z_2}^H = \sigma_{x_1}^H + \sigma_{y_1}^H \cos^2\alpha + \\ &+ \sigma_{z_1}^H \sin^2\alpha + \sigma_{y_1}^H \sin^2\alpha + \\ &\sigma_{z_1}^H \cos^2\alpha = \sigma_{x_1}^H + \sigma_{y_1}^H + \sigma_{z_1}^H\,.\end{aligned}$$

Условие (7) выполняется. Следовательно, нормальные напряжения определены верно.

Касательные напряжения по координатным осям X_2, Y_2, Z_2

$$\tau_{x_2y_2}^H = \tau_{y_2x_2}^H = 0\,;$$

$$\tau_{x_2z_2}^H = \tau_{z_2x_2}^H = 0\,;$$

$$\tau_{z_2y_2}^H = \tau_{y_2z_2}^H = \frac{1}{2}\left(\sigma_{z_1}^H - \sigma_{y_1}^H\right)\sin 2\alpha\,.$$

Окончательно контактные напряжения по граням выделенного элемента в нормальном сечении витка равны

$$\begin{cases}\sigma_{x_2}^H = \sigma_{x_1}^H\,; \\ \sigma_{y_2}^H = \sigma_{y_1}^H \cos^2\alpha + \sigma_{z_1}^H \sin^2\alpha; \\ \sigma_{z_2}^H = \sigma_{y_1}^H \sin^2\alpha + \sigma_{z_1}^H \cos^2\alpha;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tau_{x_2y_2}^H = \tau_{y_2x_2}^H = 0; \\ \tau_{x_2z_2}^H = \tau_{z_2x_2}^H = 0; \\ \tau_{z_2y_2}^H = \tau_{y_2z_2}^H = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{z_1}^H - \sigma_{y_1}^H\right)\sin 2\alpha.\end{cases} \qquad (8)$$

Контактные напряжения по координатным осям X, Y, Z выделенного элемента в продольном сечении винта определены по формулам [1]. Нормальные и касательные напряжения через напряжения (1-3) равны[2,6]

$$\begin{cases}\sigma_x^H = \sigma_{x_1}^H \cos^2\lambda + \\ + \left(\sigma_{y_1}^H \sin^2\alpha + \sigma_{z_1}^H \cos^2\alpha\right)\sin^2\lambda; \\ \sigma_y^H = \sigma_{y_1}^H \cos^2\alpha + \sigma_{z_1}^H \sin^2\alpha; \\ \sigma_z^H = \left(\sigma_{y_1}^H \sin^2\alpha + \sigma_{z_1}^H \cos^2\alpha\right)\cos^2\lambda + \\ + \sigma_{z_1}^H \sin^2\alpha;\end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases}\tau_{xy}^H = \tau_{yx}^H = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{z_1}^H - \sigma_{y1}^H\right)\sin 2\alpha; \\ \tau_{xz}^H = \tau_{zx}^H = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_{x_1}^H + \sigma_{y_1}^H \sin\alpha + \\ + \sigma_{z_1}^H \cos^2\alpha\end{pmatrix}\sin 2\lambda; \\ \tau_{yz}^H = \tau_{zy}^H = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{z_1}^H - \sigma_{y_1}^H\right)\sin 2\alpha\cos\lambda.\end{cases} \qquad (10)$$

Выбор критерия прочности при расчете передач с точечным контактом сопрягаемых поверхностей имеет большое значение, так как соотношение между составляющими напряженного состояния зоны контакта существенно зависит от формы эллиптической площадки контакта $\beta_H = b/a$ [5]. При этом форма эллиптической площадки контакта в зависимости от геометрических параметров контактирующих тел может изменяться в широких пределах, приближаясь к кругу или к полоске, и поэтому каждому значению β_H соответствует свое напряженное состояние.

При точечном контакте сопрягаемых поверхностей использование критерия наибольших нормальных напряжений создает неудобства, поскольку данный критерий ограничивает только максимальные напряжения, и поэтому для каждого напряженного состояния, т.е. для каждого значения β_H, требуют свои допускаемые напряжения. Таким образом, нельзя установить единые нормы на допускаемые напряжения для передач с начальным контактом сопрягаемых поверхностей в точке.

Возникает необходимость найти такой критерий контактной прочности, который бы полностью учитывал напряженное состояние зоны контакта (все три составляющие напряженного состояния) и при любом β_H давал одинаковые значения допускаемых напряжений.

Многочисленные данные свидетельствуют о том [5], что критерий энергии формоизменения хорошо аппроксимирует результаты экспериментов с образцами из разных сталей, находящимися в условиях плоского или объемного напряженного состояния. Применимость энергии формоизменения как критерия контактной прочности для двухосного и в некоторых случаях трехосного напряженного состояния подтверждается экспериментальными данными.

С целью экспериментального подтверждения применимости критерия энергии формоизменения с контактом в точке были проведены испытания на контактную прочность рабочих поверхностей роликов [5]. Ролики были изготовлены из стали разных марок, имели различную твердость и обеспечивали различные значения коэффициентов β_H. Испытания показали, что критерий наибольших нормальных напряжений неприменим при расчетах с контактом в точке, так как различия в пределах контактной выносливости $\sigma_{H\lim}$ возрастает с увеличением разности значений β_H и твердости рабочих поверхностей и в приведенных экспериментах достигла 40%; теоретически различия в пределах выносливости $\sigma_{H\lim}$ по этому критерию для $\beta_H = 0$ и $\beta_H = 1$ составляет 100%. При использовании критерия энергии формоизменения различие в значениях $\sigma_{H\lim}$ для одной и той же твердости, но разных β_H, не превышало 5%. Эти отклонения отнесены за счет разброса экспериментальных данных, и сделан вывод, что расчет по критерию энергии формоизменения значения $\sigma_{H\lim}$ не зависят от коэффициента β_H. Следовательно, в качестве критерия контактной прочности [5] берется критерий энергии формоизменения (четвертая теория прочности).

Заключение

В работе определены контактные напряжения сопрягаемых винтовых поверхностей с применением формул Герца в продольном сечении витка механизма. В качестве критерия контактной прочности берется критерий энергии формоизменения (четвертая теория прочности). Предложенный метод расчета контактных напряжений целесообразно распространить на все виды зубчатых передач с контактом в точке, в том числе, на расчет фрикционных передач.

Литература

1. *Гастев Е. Г.* Краткий курс сопротивления материалов. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

2. *Лодыгина Н.Д.* Исследование напряжений деталей винтовых механизмов// Машиностроение и безопасность жизнедеятельности. 2011, №1. – С. 63-66.

3.*Лодыгина Н.Д.* Напряженное состояние в произвольной точке сечения витков деталей несоосных винтовых механизмов // Машиностроение и безопасность жизнедеятельности. 2011, №2. – С. 55-57.

4. Расчеты на прочность в машиностроении / *С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихачев* и др. – М.: Машгиз, Т.1, 1956. – 884 с.; Т.2, 1958. – 974 с.; Т. 3, 1959. – 1118 с.

5. *Решетов Д.Н., Голлер Д.Э., Брагин В.В.* Перспективы стандартизации расчетов зубчатых передач // Вестник машиностроения. 1985, №11. – С. 3-7.

6. *Шарапов Р.В., Лодыгина Н.Д.* Расчет напряжений деталей несоосного винтового механизма // Фундаментальные исследования. 2009, №5. – С. 70-71.

References

1. *Gostev E.G.* A short course of materials strength. – Moskow: Nauka, 1977. – 456 p.

2. *Lodigina N.D.* Investigation of the stress components screw mechanisms // Engineering industry and life safety, 2011, № 1. – P. 63-66.

3. *Lodigina N.D.* Stressed state at the arbitrary point of the section of the turns of components of misaligned screw mechanisms // Engineering industry and life safety, 2011, № 2. – P. 55-57.

4. Calculations of strength in engineering / *S.D. Ponomarev, V.L. Biderman, K.K. Likhachev*, etc. – Moskow: Mashgiz, Vol.1, 1956. – 884 p., Vol.2, 1958. – 974 p., Vol.3, 1959. – 1118 p.

5. *Rechetov D.N., Goller D.E., Bragin V.V.* Prospects for standardization calculations gears // Bulletin of Engineering Industry. 1985, № 11. – P. 3-7.

6. *Sharapov R.V., Lodigina N.D.* Stress analysis of parts misalignment screw mechanism // Fundamental research, 2009, №5. – P. 70-71.

Статья поступила в редакцию 21 февраля 2013 г.

Лодыгина Нина Дмитриевна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Техносферная безопасность» Муромского института (филиала) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых». E-mail: nina.lodygina@yandex.ru

Lodigina Nina Dmitrievna – Ph.D., Murom Institute of Vladimir State University. E-mail: nina.lodygina@yandex.ru