УДК 621:534; 833

Возможности влияния внешних воздействий на приведенную жесткость системы

Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Большаков Р.С.

Рассматривается способ изменения динамического состояния виброзащитных систем через введение дополнительных силовых воздействий, которые находятся в определенных связях с известным внешним возмущением. Показано, что такой способ соответствует одной из форм автоматического управления состоянием по возмущению. Ключевым моментом в формировании предлагаемого подхода является наличие двух (как минимум) внешних воздействий, по отношению к которым предполагается возможность установления функциональной связи. Рассматривается простейшая форма связи в виде постоянного коэффициента между аплитудными значениями внешних сил. При этом принимается во внимание знак коэффициента. Показаны возможности изменения приведенных жесткостей системы, то есть изменения ее параметров при различных коэффициентах связей. Процессы влияния на состояние системы связаны с возможностями изменения частот собственных колебаний, режимов динамического гашения и др.

Ключевые слова: виброзащитная система, управление по возмущению, динамическое гашение колебаний.

Введение

При разработке способов и средств уменьшения действия вибраций в отдельных узлах машин и оборудования часто используются динамические гасители колебаний, представляющие собой инерционные элементы, присоединенные с помощью упругих связей [1,2]. В последние годы большое внимание уделяется развитию структурных подходов, опирающихся на идеи автоматического регулирования[3,4]. Вместе с тем, существуют и другие подходы, в рамках которых могут разрабатываться способы и средства изменения динамического состояния объекта защиты. В частности виброзащитная система, если она имеет несколько степеней свободы, может быть подвержена действию нескольких внешних факторов. Если частоты внешних возмущений совпадают, то одним из путей рационального проектирования виброзащиты могло бы стать управление суммарными силовыми параметрами или групповыми свойствами, что предполагает введение дополнительных внешних сил с целью построения некоторой системы сил, обладающих определенными свойствами [5].

I. Общие положения. Постановка задачи исследования.

Рассматривается виброзащитная система с двумя степенями свободы (рис. 1а), состоящая из объекта массой m_1, динамического гасителя m_2, упругих элементов k_1, k_2, k_3 и двух внешних сил Q_1 и Q_2. Внешние гармонические силы связаны между собой соотношением $Q_2 = \alpha Q_1$, где α может изменяться в пределах $-\infty < \alpha < \infty$, проходя через нулевое значение. Цель статьи заключается в создании методологических основ оценки динамических свойств виброзащитных систем с возможностями изменения состояния объекта защиты при совокупном действии нескольких возмущающих факторов, которые имеют между собой определенные функциональные связи. Запишем выражение для кинетической и потенциальной энергий системы

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2,$$

$$П = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 y_2^2$$

и получим систему дифференциальных уравнений, которая может быть записана в виде

$$m_1 y_1 + k_1 y_1 + k_2 y_1 - k_2 y_2 = Q_1, \qquad (1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 + k_3 y_2 - k_2 y_1 = Q_2. \qquad (2)$$

а)

б)

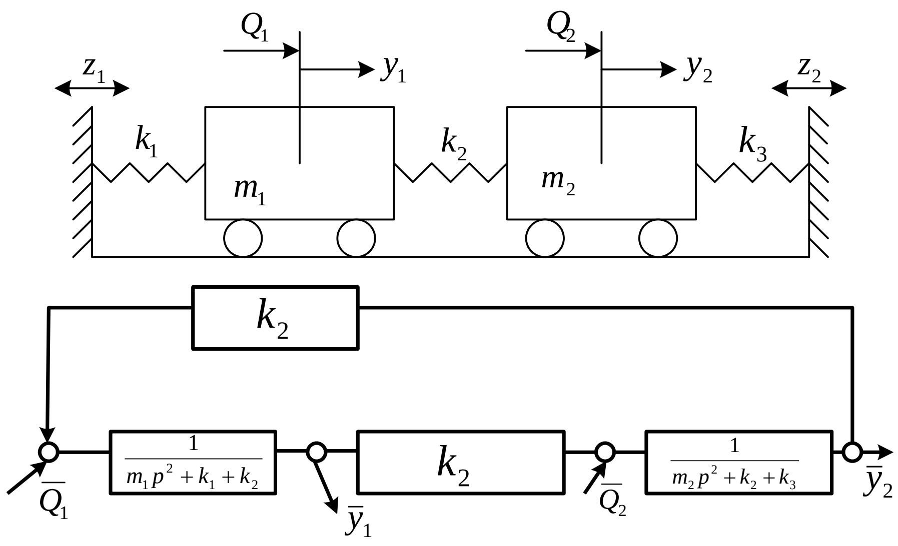

Рис. 1. Расчетная (а) и структурная (б) схемы виброзащитной системы.

Структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления имеет вид, как показано на рис. 1 б.

Запишем формулы для определения координат y_1 и y_2 [5]:

$$y_1 = \frac{Q_1 a_{22} - Q_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \tag{3}$$

$$y_2 = \frac{-Q_1 a_{12} + Q_2 a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \tag{4}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ определяются из (1), (2) и представлены в табл. 1.

Таблица 1. Коэффициенты уравнений движения в системе координат y_1, y_2

a_{11}	a_{12}
$m_1 p^2 + k_1 + k_2$	$-k_2$
a_{21}	a_{22}
$-k_2$	$m_2 p^2 + k_2 + k_3$
Q_1	Q_2
Q_0	$Q_0 \alpha$

Примечание: Q_1 и Q_2 – обобщенные силы, приложенные соответственно к элементам системы с массами m_1 и m_2.

II. Оценка динамических свойств

Передаточная функция по координате y_1 в соответствии со схемой на рис. 2 имеет вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_0} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3 + \alpha k_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{m_2 p^2 + k_2(1+\alpha) + k_3}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \tag{5}$$

где $p = j\omega$ – комплексная переменная [6].

Режим динамического гашения по координате y_1 можно найти из числителя (3):

$$\omega_{дин}^2 = \frac{k_2(1+\alpha) + k_3}{m_2}. \tag{6}$$

Найдем критическое значение, при котором $\omega_{дин}^2 = 0$:

$$\alpha_{кр} = -\frac{k_2 + k_3}{k_2}; \tag{7}$$

то есть при значении $\alpha_{кр}$ режим динамического гашения не реализуется. Если $\alpha > \alpha_{кр}$, то режим динамического гашения возможен: при $\alpha = \alpha_{кр}$ имеем $\omega_{дин}^2 = 0$; при $\alpha > \alpha_{кр}$ – числитель (3) имеет отрицательное значение.

Найдем приведенную жесткость системы по координате y_1:

$$k_{пр_1} = \frac{(k_2 + k_3)(k_1 + k_2) - k_2^2}{k_2(1+\alpha) + k_3} = \frac{k_2 k_1 + k_3 k_1 + k_3 k_2}{k_2(1+\alpha) + k_3}. \tag{8}$$

Если $\alpha = \alpha_{кр}$, то приведенная жесткость $k_{пр}$ будет $\to \infty$. Физически это означает, что точка y_1 при действии силы Q_1 не смещается (происходит уравновешивание сил Q_1 и Q_2), но относительно этого положения возможны колебания. Однако амплитудно-частотная характеристика будет иметь специфичный вид, поскольку передаточная функция (5) изменится

$$W_1 = \frac{m_2 p^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \qquad (9)$$

Амплитудно-частотная характеристика системы в этом случае начинается с *0*, а на высоких частотах – также стремится к *0*. Если $k_{пр}$ будет меньше нуля, то передаточная функция системы примет вид

$$W_1(p) = \frac{m_2 p - b}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \qquad (10)$$

где b – некоторая величина, $b < \alpha_{кр}$. Отрицательный знак приведенной жесткости $k_{пр_1}$ не означает потери устойчивости, также как бесконечно большое ее значение при $\alpha = \alpha_{кр}$. В данном случае происходит перераспределение направлений движения по координатам, точнее их смещения под действием сил и формирования нового положения равновесия, относительно которого происходит колебания, вызванные периодическими силами Q_1, Q_2.

Аналогичным образом может быть рассмотрено и движение по координате y_2, для которой по формуле Крамера [6]

$$y_2 = \frac{-Q_1 a_{12} + Q_2 a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \qquad (11)$$

откуда передаточная функция системы при входе Q_1 и выходе y_2 принимает вид

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{k_2 + \alpha(m_1 p^2 + k_1 k_2)}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{\alpha m_1 p^2 + k_2(1+\alpha) + \alpha k_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \qquad (12)$$

а частота динамического гашения по координате y_2 определится

$$\omega^2_{дин2} = \frac{k_2(1+\alpha) + \alpha k_1}{\alpha m_1}. \qquad (13)$$

Критическое значение α для данного случая составляет

$$\alpha_{кр} = -\frac{k_2}{k_1 + k_2}. \qquad (14)$$

Таким образом, приведенная жесткость по координате y_2 имеет вид:

$$k_{пр} = \frac{k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3}{k_2(1+\alpha) + \alpha k_1}. \qquad (15)$$

Из выражения (12) следует, что частоты собственных колебаний системы не зависят от параметра α. Однако, величина частоты динамического гашения колебаний зависит от α. При $\alpha = \alpha_{кр}$ – частота динамического гашения будет равна нулю, при изменениях α в пределах $-\infty < \alpha < \infty$ график изменения $\omega^2_{дин}$ показан на рис. 2.

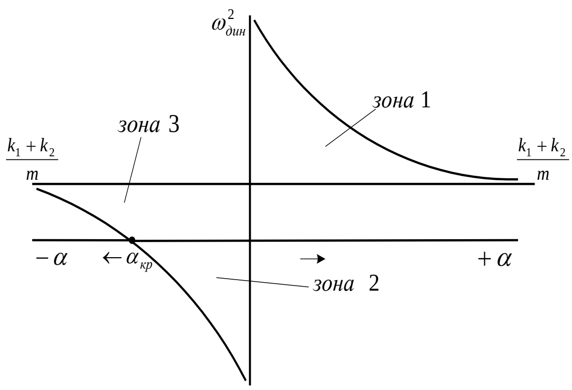

Рис. 2. График зависимости частоты динамического гашения $\left(\omega^2_{дин}\right)$ от величины α.

Отметим, что частота динамического гашения изменяется в соответствии со значением α и может находиться в пределах трёх зон: вторая зона соответствует отрицательным значениям квадрата частоты, что не представляет физического интереса; первая и третья зоны дают положительные значения частот, форм амплитудно-частотных характеристик $A(\omega)$, как показано на рис. 3.

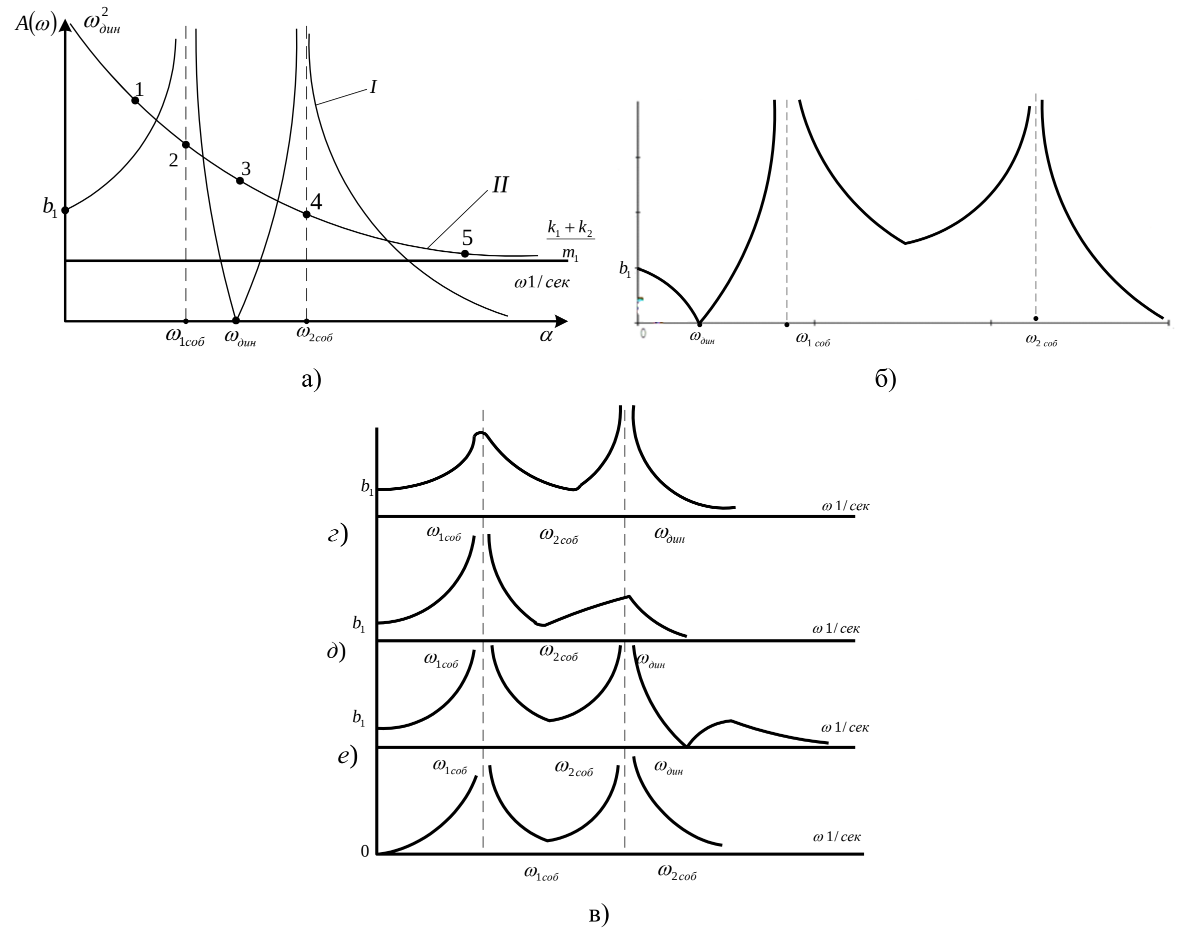

Рис. 3. Семейство амплитудно-частотных характеристик системы (АЧХ) при различных значениях α :
а) кривая I – АЧХ системы в общем виде с режимом динамического гашения между двумя резонансами (точка 3); кривая II - соответствует зависимости $\omega^2_{дин}$ от параметра α ;
б) АЧХ соответствует случаю, характеризуемому точкой 1 на кривой II;
в) случай, когда АЧХ соответствует точке 2, при которой $\omega^2_{дин} = \omega^2_{1соб}$; г) случай, когда $\omega^2_{дин} = \omega^2_{2соб}$;
д) случай, соответствующий точке 5 на кривой II ($\omega^2_{дин} > \omega^2_{2соб}$);
е) случай, когда $\alpha = \alpha_{кр}$, при котором на АЧХ нет режима динамического гашения.

При частоте внешних воздействий, соответствующих $p = 0$, начальное значение $A(\omega)$, то есть коэффициент передачи амплитуды колебаний будет зависеть от α, при этом $A(\omega) = |W(p)|$.

Наличие взаимной связи между силами возмущения и управляющей силой, фаза которой может быть настраиваемой, создают эффекты изменения приведенной жесткости системы или приведенной массы. Такой способ настройки системы для защиты объекта соответствует в рамках структурной теории виброзащитных систем [1] способу управления по возмущающей силе. В этом случае настроечный параметр затрагивает только числитель передаточной функции и не влияет на величину частот собственных колебаний.

Таким образом, в системе с двумя степенями свободы при определении частоты динамического гашения и формировании амплитудно-частотных характеристик появляется настроечный параметр α, который может изменяться в достаточно больших пределах.

Приведенная жесткость при наличии системы внешних сил дает представление о смещении по координате в предположении, что в этой точке приложена обобщенная сила. Такая сила заменяет собой действие исходной системы возмущения, но при такой силе имеется соответствующий коэффициент, который учитывает характер распределения сил. Если $k_{пр} \to \infty$, а податливость в данной точке стремится $\to 0$, то это свидетельствует о формировании положения равновесия, относительно которого могут формироваться колебания объекта рассмотрения. Знак (-) или (+) в значении $k_{пр_1}$ характеризует движение в том или ином направлении от состояния равновесия.

Пусть $Q_1 = k_1 z_1,\ Q_2 = k_3 z_2$, если $z_1 = z_2 = z$,

то $$\frac{y_1}{z} = k_1 z_1 \frac{(m_2 p^2 + k_2 + k_3) + k_3 z_2}{k_2(1+\alpha) + \alpha k_1}, \quad (16)$$

если $z_2 = \alpha z_1$:

$$\frac{y_1}{z} = \frac{k_1 m_2 p^2 + k_1(k_2 + k_3) + k_3 \alpha k_2}{k_2(1+\alpha) + \alpha k_1}, \quad (17)$$

$$\omega^2_{дин} = \frac{k_1(k_2 + k_3) + k_3 \alpha k_2}{k_1 m_2}, \quad (18)$$

$$\left|W_1(p)\right|_{p=0} = \frac{k_1(k_2 + k_3) + k_3 \alpha}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}. \quad (19)$$

С учетом (3), (4) запишем, что

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 &= \frac{-Q_1 a_{12} + Q_2 a_{11}}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} = \\ &= \frac{k_2 k_1 z_1 + k_3 z_2 (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}, \end{aligned} \quad (20)$$

тогда:

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_1} = \frac{k_3 \alpha m_1 p^2 + \alpha k_3 (k_1 + k_2) + k_1 k_2}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}, \quad (21)$$

откуда

$$\omega^2_{дин} = \frac{\alpha k_3 (k_1 + k_2) + k_1 k_2}{k_3 \alpha m_1}. \quad (22)$$

То есть режимы динамического гашения зависят от системы внешних сил. Если один из силовых факторов считать внешним возмущением, то второй силовой фактор можно рассматривать как управляемую силу, вводимую для изменения динамического состояния. Контроль за характером изменения состояния можно вести по значению $k_{пр}$. Знак и величина $k_{пр}$ определяют вид АЧХ. При $k_{пр} \to \infty$, что может определяться значением $\alpha_{кр}$, АЧХ начинается с нуля.

Если $\alpha = \alpha_{кр}$, то режима динамического гашения по рассматриваемой координате нет.

III. Учет особенностей внешних возмущений

Рассмотрим случай, когда система внешних возмущений имеет силовые и кинематические компоненты.

Пусть $z_2 = \alpha z_1$, что вполне допустимо, запишем $Q_1' = Q_1 + k_1 z_1,\ Q_2' = Q_2 + k_3 \alpha z_1$, а также $Q_2 = \beta Q_1$ или

$$Q_1' = Q_1 + k_1 z_1,\ Q_2' = \beta Q_1 + k_3 \alpha z_1;$$

или

$$Q_1' = z_1\left(\frac{Q_1}{z_1} + k_1\right),\ Q_2' = z_1\left(\frac{\beta Q_1}{z_1} + k_3 \alpha\right); \quad (23)$$

то есть систему внешних воздействий Q_1, Q_2, z можно привести к одному кинематическому возмущению z_1, но надо ввести параметры $\alpha = \frac{z_1}{z_2}$, $\beta = \frac{Q_1}{Q_2}$. Нужно еще один параметр – условную пружину, жесткость которой будет равна $\frac{Q_1}{z_1} = k_0$, тогда

$$Q_1' = z_1(k_0 + k_1),\ Q_2' = z_1(\beta k_0 + k_3 \alpha). \quad (24)$$

Если сила Q_1 прикладывается к телу массой m_1 и одновременно с этим появляется сила Q_2 той же частоты и начинает действовать по координате y_2, будучи приложена к массе m_2, то можно говорить о групповом эффекте. Сила Q_1 подчиняет себе или ставит в управление себе силу Q_2. При этом $Q_2 = \alpha Q_1$. В системе происходят изменения. АЧХ изменяется таким образом, как будто бы изменяется жесткость пружины k_2. Это изменение жесткости определяется параметром α, который может иметь отрицательное и положительное значения, проходя через нуль. То есть если $\alpha < 0$, то групповое взаимодействие системы внешних сил проявляет себя как введение в систему пружины с соответствующей жесткостью. Вопрос заключается в том, может ли быть такая ситуация реализована. Можно положительно ответить на такой вопрос. Если Q_1 приложено к массе m_1 как одна из сторон взаимодействия, вызванного помещением электродинамического вибратора между m_1 и m_2, то $\alpha = -1$ в соответствии с законами механики (действие равно противодействию). Однако ситуация более универсальная может быть предложена на основе использования двух пар инерционных возбудителей. В принципе, подход может быть распространен и на систему с несколькими степенями свободы. Но суть остается одинаковой – связи между силами эквивалентны по физическому эффекту.

Таким образом,

$$Q_1 = Q_1 + k_1 z_1 = Q_1(1 + \frac{k_1 z_1}{Q_1}) = Q(1 + \frac{k_1}{k_0}) \quad (25)$$

Если $\frac{Q_1}{z_1} = k_0$, то

$$Q_2 = Q_1\left(\beta + \frac{k_3 \alpha z_1}{Q_1}\right) = Q_1\left(\beta + \frac{k_3\alpha}{k_0}\right). \quad (26)$$

Тогда передаточные функции системы определяются

$$\frac{\bar{y}_1}{Q_1} = (1 + \frac{k_1}{k_0}) \frac{(m_2 p^2 + k_2 + k_3) + \dots + k_2(\beta + \frac{k_3\alpha}{k_0})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad (27)$$

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = (1 + \frac{k_1}{k_0})k_2 + \left(\beta + \frac{k_3\alpha}{k_0}\right) \times \times (m_1 p^2 + k_1 + k_2), \quad (28)$$

откуда

$$\omega_{1дин}^2 = \frac{(k_2 + k_3)(k_0 + k_1) + k_2(\beta k_0 + \alpha k_3)}{(k_1 + k_0)m_2}, \quad (29)$$

$$\omega_{2дин}^2 = \frac{(k_1 + k_0) + k_2(\beta k_0 + \alpha k_3)(k_1 + k_2)}{(k_0\beta + k_3\alpha)m_1}. \quad (30)$$

То есть при возмущении Q_1 и установлении связей с остальными силовыми факторами возможны режимы динамического гашения. Отметим, что в выражение для определения частот динамического гашения входят и параметры дополнительно вводимых управляющих сил. В физическом смысле эти силы реализуются как дополнительные упругие элементы, то есть вводимые силы изменяют упругие свойства системы. Подходы, основанные на введении дополнительных сил, управляемых таким образом, чтобы изменять некоторые динамические свойства системы, можно рассматривать как реализацию принципа управления состоянием системы по возмущающему воздействию [7]. Характерным признаком такого управления является возможность изменять только числитель передаточной функции.

Заключение

Таким образом, при действии на систему нескольких внешних сил при наличии между ними определенных связей, например, по величинам амплитуд возмущений, а также некоторых фазовых соотношениях, система приобретает ряд признаков, которые можно отнести к возможностям реализации принципа управления по возмущению.

Литература

1. *Елисеев С.В. Нерубенко Г.П.* Динамические гасители колебаний. – Новосибирск: Наука, 1982. – 182 с.

2. *Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Ермошенко Ю.В.* Рычажные связи в задачах динамики транспортной подвески // Системы. Методы. Технологии, 2011, № 9. – С. 24-31.

3. *Елисеев С. В., Трофимов А.Н., Большаков Р. С., Савченко А. А.* Концепция обратной связи в динамике механических систем и динамическое гашение колебаний //

techomag.edu.ru: Наука и образование: электронное научно-техническое издание, 2012, №5. URL. http://technomag.edu.ru/doc/378353.html (дата обращения: 10.05.2012)

4. *Кашуба В.Б., Белокобыльский С.В.* Обобщенная теория динамических гасителей колебаний технологических машин // Материалы V международной научной конференции «Проблемы механики современных машин». – Улан-Удэ. 2012, Т. 2. – С. 204-214

5. *Елисеев С.В,, Лонцих П.А.* Влияние управляющей силы в структуре внешних возмущений // Вестник Иркутского гос. технического университета. – Иркутск, 2011, Вып. 4(51). – С. 26-33.

6. *Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П.* Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. – Новосибирск: Наука. 2010. – 430 с.

References

1. *Eliseev S.V., Nerubenko G.P.* Dynamic damper. – Novosibirsk: Nauka, 1982. – 182 p.

2. *Eliseev S.V., Kashuba V.B., Ermoshenko Y.V.* Communication linkages in the dynamics of the transport suspension // Systems. Methods. Technology, 2011. № 9. – P. 24-31.

3. *Eliseev S.V., Trofimov A.N., Bolshakov R.S., Savchenko A.A.* The concept of feedback in the dynamics of mechanical systems and the dynamic vibration damping // techomag.edu.ru: Education & Science: e-science and technology edition, 2012, №5. URL. http://technomag.edu.ru/doc/378353.html.

4. *Kashuba V.B., Belokobylsky S.V.* Generalized theory of dynamic damper technology machines // Processing of the V International Conference "Problems of modern machines." – Ulan-Ude. 2012, Vol. 2 – P. 204-214.

5. *Eliseev S.V., Lonzih P.A.* Effect of controlling force in the structure of external disturbances // Bulletin of the Irkutsk State Technical University – Irkutsk, 2011, №. 4 (51). – P. 26-33.

6. *Eliseev S.V., Resnick Y.N., Khomenko A.P.* Mechatronic approach in the dynamics of mechanical vibrating systems. – Novosibirsk: Nauka. 2010. – 430 p.

Статья поступила в редакцию 30 сентября 2012 г.

Approach of change of dynamical condition of vibroprotection systems through introduction of additional connection force influence are considered. Such approach accordances to form of automatical control by force of influence. Key moment in formation of offering method is presence two (at least) external influences in relation which are supposed installation possibility of function tie. Usually form of tie are considered in the form constant coefficient between amplitude meaning of external influences. Sign of coefficient is taken into account. Change coerced rigidities possibilities are shown that is change her parameters at different coefficients of tie. Influence processes on state ties of systems related to change frequencies own oscillations possibilities, dynamical absorbtion regimes and other.

Keywords: vibroprotection system, control to the influence, dynamical absorbtion of oscillations

Елисеев Сергей Викторович – доктор технических наук, профессор, директор НИИ «Современных технологий, системного анализа и моделирования» ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет путей сообщения»

Кашуба Владимир Богданович – кандидат технических наук, доцент, директор технопарка Братского государственного университета

Большаков Роман Сергеевич – аспирант ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет путей сообщения»