

УДК 534.014

Движение материальной частицы с подбрасыванием на примере модельной задачи с неударивающими связями

Елисеев С.В., Ситов И.С., Елисеев А.В.

Цель работы заключается в создании методов исследования механических систем с неударивающими связями. Рассматриваются задачи определения характеристик одиночного подбрасывания и режимов подбрасывания материальной частицы поверхностью колебания в гравитационном поле. Реализована графоаналитическая методика определения параметров режимов подбрасывания. Рассмотрены характеристики режимов в зависимости от двух типов отрыва материальной частицы от поверхности. Представлены аналитические соотношения основных характеристик режимов подбрасывания материальной частицы с кратным периодом полета в зависимости от параметров колебания поверхности. Определены точки возникновения новых режимов непрерывного подбрасывания при непрерывном изменении одного из параметров системы. Предложенная методологическая основа может быть использована для исследования режимов непрерывного подбрасывания с учетом дополнительной постоянной силы, действующей со стороны внешней среды в фазе свободного полета.

Ключевые слова: неударивающие связи, взаимодействие материальной частицы с вибрирующей поверхностью, режим подбрасывания в одно касание.

Введение

Необходимость исследования процесса динамического взаимодействия материального объекта с вибрирующей поверхностью возникает при решении задач в актуальных отраслях современной экономики: промышленности, сельском хозяйстве, транспорте. К примеру, в связи с обеспечением безопасности перевозки грузов важными являются исследования взаимодействия твердого тела с вибрирующей поверхностью при наличии неударивающих связей.

Изучение обозначенных динамических процессов проводилось в значительном числе работ по теоретической [1] и аналитической механике [2], теории механизмов и машин [3], теории вибрационного переноса [4]. Ряд вопросов, касающихся контактного взаимодействия, движения с подбрасыванием, периодических безударных движений в системах с неударивающими связями отражен в работах [5-8].

Несмотря на то, что многие вопросы взаимодействия материальной частицы и поверхности глубоко исследованы, ряд вопросов не

получил должного развития. В частности, не достигнута достаточная детализация условий формирования зазоров, аналитических условий отрыва и соударения, необходимая для моделирования процесса.

Цель работы – получить аналитическое представление режимов подбрасывания материальной частицы на вибрирующей поверхности с неударивающими связями в зависимости от параметров системы: амплитуды и частоты колебания поверхности.

Общие положения и постановка задачи исследования

Рассматривается модельная задача подбрасывания материальной частицы массы m на горизонтальной вибрирующей поверхности H . Данная поверхность совершает гармонические колебания $A \sin(\omega t)$. Предполагается, что в некоторый начальный момент времени t_0 точка m находится в контакте с поверхностью H и удерживается на поверхности H только гравитационными силами. При некоторых значениях параметров амплитуды A и частоты ω для материальной частицы m ре-

ализуется режим периодического подбрасывания. В данной задаче считается, что удар о поверхность является абсолютно неупругим. Требуется определить условия реализации возможных режимов и оценить основные характеристики режимов в зависимости от параметров колебания поверхности.

Траектория движения частицы S после отрыва в точке t_0 от поверхности колебания с законом движения $H(t) = A \sin(\omega t)$ описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{S}(t) = -g, t \geq t_0 \\ \dot{S}(t_0) = \dot{H}(t_0) \\ S(t_0) = H(t_0) \end{cases} .$$

Общее решение данной системы имеет вид:

$$S(t) = A \sin(\omega t_0) + A \omega \cos(\omega t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 .$$

На рисунке 1 представлена характерная траектория 2 после отрыва от поверхности колебания 1.

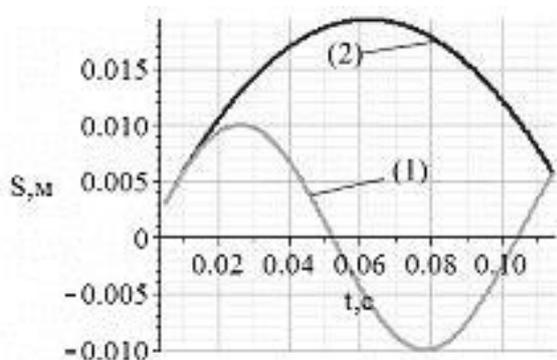


Рис. 1. Характерный полет материальной частицы.

Для реализации отрыва в точке t_0 необходимо выполнение определенных условий.

Условия отрыва материальной частицы от поверхности колебания

Для поверхности $H(t)$ существует только два типа отрыва [9]. Первый тип – это отрыв третьего порядка, который реализуется в мо-

мент t_0 с нулевой реакцией опоры. Параметры системы в точке отрыва такого типа удовлетворяют уравнению:

$$\begin{cases} 1 - \frac{A \omega^2}{g} \sin(\omega t_0) = 0 \\ \cos(\omega t_0) > 0 \end{cases} .$$

Второй тип отрыва - отрыв второго порядка. Такой отрыв происходит без предварительного пролеживания. Параметры системы в точке отрыва t_0 второго порядка удовлетворяют уравнению:

$$1 - \frac{A \omega^2}{g} \sin(\omega t_0) < 0 .$$

Стадия одиночного подлета материальной частицы в процессе подбрасывания

Траектории подлета материальной частицы определяются типом точки отрыва. Для точек отрыва третьего порядка траектория подлета имеет вид:

$$S(t) = \frac{\omega^2}{g} + A \omega \sqrt{1 - \left(\frac{g}{A \omega^2}\right)^2} (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 ,$$

$$t_0 = \frac{\arcsin\left(\frac{g}{A \omega^2}\right)}{\omega} .$$

Высота подлета частицы составляет:

$$S_{\max} = \frac{g}{2 \omega^2} + \frac{A^2 \omega^2}{2g} .$$

Для оценки относительной величины подлета материальной частицы по сравнению с амплитудой колебания поверхности рассматривается динамический коэффициент D :

$$D = \frac{g}{2A \omega^2} + \frac{A \omega^2}{2g} .$$

По мере роста амплитуды и частоты высота подлета многократно превышает амплитуду колебания поверхности.

Траектории подлета с точкой отрыва второго порядка представляют собою параметрическое семейство парабол в зависимости от $\tau \in (-1,1)$:

$$S(t) = A \sin(\omega t_\tau) + A \omega \cos(\omega t_\tau)(t - t_\tau) - \frac{1}{2} g(t - t_\tau)^2.$$

Моменты отрыва данного семейства имеют вид:

$$t_\tau = \frac{\pi}{2\omega} + \tau \left(\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\arcsin\left(\frac{g}{A\omega^2}\right)}{\omega} \right).$$

Высота подлета каждой траектории в зависимости от параметра определяется:

$$S_{\max}(t_\tau) = \begin{cases} A \cos(\tau\pi\theta) + \frac{A^2\omega^2}{2g} (\sin(\tau\pi\theta))^2, & \tau \in (-1,0); \\ A \cos(\tau\pi\theta), & \tau \in (0,1). \end{cases}$$

Соответствующий коэффициент динамичности имеет вид:

$$D(\tau) = \begin{cases} \cos(\tau\pi\theta) + \frac{A\omega^2}{2g} (\sin(\tau\pi\theta))^2, & \tau \in (-1,0); \\ \cos(\tau\pi\theta), & \tau \in (0,1). \end{cases}$$

Из выражения видно, что если параметр τ стремиться к нулю, то точка отрыва имеет фазу близкую к $\frac{\pi}{2}$, соответственно, коэффициент динамичности стремится к единице независимо от величины амплитуды и частоты колебания.

Режимы периодического подбрасывания с кратным периодом подлета

Для реализации режима подбрасывания с кратным периодом подлета необходимо так согласовать частоту и амплитуду колебания поверхности, чтобы при падении частица оказывалась в условиях отрыва. С необходимостью должны быть выполнены условия согласования моментов отрыва t_0 и падения t_1 :

$$S(t)|_{t=t_0} = S(t)|_{t_1=t_0+\frac{2\pi k}{\omega}}.$$

Оказывается, что такие соотношения могут быть установлены для любого целого числа k . Увеличивая частоту колебания и амплитуды, всегда можно перебросить частицу через k периодов из точки отрыва третьего порядка. При этом найдутся такие частицы, которые будут отрываться от поверхности в

области отрыва второго порядка и перелетать не через k , а через $k-1, k-2, \dots, 1$ период. На рис. 2 представлены траектории подлета через 1, 2, 3 периода с отрывом от поверхности 1. Материальные частицы, которые перелетают через большее количество периодов, будут иметь большую высоту подлета. С ростом частоты и амплитуды частицы, которые перелетают через фиксированное количество периодов, будут подлетать на меньшую высоту.

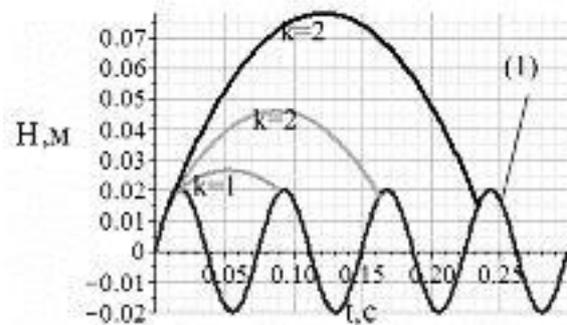


Рис. 2. Режимы подбрасывания частицы в одно касание.

Для фиксированного k условие отрыва из области третьего порядка приобретают вид:

$$\frac{g}{A\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 k^2}}.$$

Соответствующая траектория подлета имеет вид:

$$S_k(t) = \frac{g}{\omega^2} + \frac{\pi k g}{\omega} (t - t_{0k}) - \frac{1}{2} g(t - t_{0k})^2.$$

Момент времени отрыва:

$$t_{0k} = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 k^2}}\right)}{\omega}.$$

Высота максимального подлета равна:

$$S_{k,\max} = \frac{g}{\omega^2} \left(1 + \frac{\pi^2 k^2}{2} \right).$$

Величина коэффициента динамичности будет равна:

$$D_k = \frac{2 + \pi^2 k^2}{2\sqrt{1 + \pi^2 k^2}}.$$

При реализации подлета из области отрыва второго порядка существует несколько траекторий периодического подбрасывания. При фиксированной амплитуде и частоте каждому натуральному k , удовлетворяющему условию

$$k < \frac{1}{\pi} \sqrt{\left(\frac{A\omega^2}{g}\right)^2 - 1},$$

соответствует траектория вида:

$$S_k = \sqrt{A^2 - \left(\frac{\pi k g}{\omega^2}\right)^2} + \frac{\pi k g}{\omega} (t - t_{0k}) - \frac{1}{2} g (t - t_{0k})^2.$$

Точка отрыва определяется соотношением:

$$t_{0k} = \frac{\arccos\left(\frac{\pi k g}{A\omega^2}\right)}{\omega}, \sin(\omega t_0) > \frac{g}{A\omega^2}.$$

Высота подлета каждой траектории семейства составляет

$$S_{\max,k} = A \sqrt{1 - \left(\frac{\pi k g}{A\omega^2}\right)^2} + \frac{g}{2} \left(\frac{\pi k}{\omega}\right)^2.$$

Соответствующий коэффициент динамичности имеет вид:

$$D_k = \frac{g}{A\omega^2} \frac{\pi^2 k^2}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\pi k g}{A\omega^2}\right)^2},$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{\pi k g}{A}}, k < \frac{1}{\pi} \sqrt{\left(\frac{A\omega^2}{g}\right)^2 - 1}.$$

Зависимость между частотой колебания и высотой подлета материальной частицы с учетом траекторий отрыва в одно касание из области отрыва второго порядка представлена на рисунке 3.

Кривая S обозначает высоту подлета частицы при отрыве из области третьего порядка при фиксированной амплитуде, но с увеличивающейся частотой. Кривые $k=1, k=2, \dots, k=5$ обозначают высоту подлета для частиц с отрывом из области второго порядка. По мере роста частоты колебания увеличивается высота подлета оторвавшейся частицы. Начиная с некоторой частоты, возникает отрыв части-

цы с перелетом через один период. Это момент касания графика S с кривой $k=1$. С дальнейшим ростом частоты колебания высота подлета частицы из области третьего порядка с перелетом через один период уменьшается, но возникают отрыв с перебрасыванием через 2, 3, 4 и т.д. периодов.

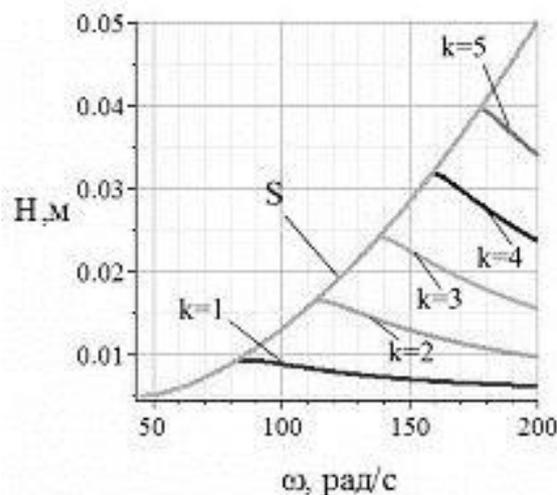


Рис. 3. Высота подлета для частиц с отрывом в области третьего и второго порядка.

Заключение

Проведенный анализ решения задачи позволяет сделать следующие выводы:

1. Предложена классификация ситуаций, в которых происходит отрыв материальной частицы от поверхности колебания. Для всех ситуаций получены условия отрыва. В частности, для режимов с перебрасыванием частицы через целое число периодов k аналитические условия отрыва из точки с реакцией опоры $N=0$ принимают вид:

$$\frac{g}{A\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 k^2}}.$$

2. Получены аналитические соотношения максимальной высоты подлета частицы в зависимости от амплитуды, частоты и коэффициента k – кратности периода подлета материальной частицы:

$$S_{\max,k} = A \sqrt{1 - \left(\frac{\pi k g}{A\omega^2}\right)^2} + \frac{g}{2} \left(\frac{\pi k}{\omega}\right)^2.$$

3. Предложена графоаналитическая методика определения взаимосвязи характеристик режимов подбрасывания, соответствующих различным ситуациям отрыва.

Литература

1. *Лойцянский Л.Г.* Курс теоретической механики: в 2 т. Т 2 Динамика / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Наука. 1968.-638 с.
2. *Лурье А.И.* Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Наука. 1986. - 516 с.
3. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – М.: Наука. 1978. – 640 с.
4. *Блехман И.И., Джаналидзе Г.Ю.* Вибрационное перемещение. – М.: Наука. 1968. – 316 с.
5. *Сельвинский В.В.* Динамика контактного взаимодействия твердых тел.- Благовещенск: Изд-во Амурского государственного университета. 2009. –164 с.
6. *Елисеев С.В., Марков К.К.* Некоторые вопросы динамики колебательного процесса при неудерживающих связях // Механика и процессы управления. – Иркутск: ИПИ, 1971. – С. 71-83.
7. *Елисеев С.В., Лоткин О.И.* Условия существования и нарушения контакта для систем с неудерживающими связями // Труды ОмИИТа. – Омск: ОмИИТ, 1966, Вып. 69. – С. 93-99.
8. *Горбиков С.П., Неймарк Ю.И.* Основные режимы движения при вибротранспортировании с подбрасыванием // Изв. АН СССР «Механика твердого тела», 1981, № 4. – С. 39-50.
9. *Елисеев С.В., Елисеев А.В.* Режимы подбрасывания материальной частицы на

вибрирующей поверхности в модельной задаче с неудерживающими связями. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование, 2012, №3(35). – С. 64-75.

References

1. *Loitsyansky L.G.* Course of Theoretical Mechanics. Vol. 2. Dynamics / L.G. Loitsyansky, A.I. Lurie. - Moscow: Nauka. 1968. – 638 p.
2. *Lurie A.I.* Analytical Mechanics / A.I. Lurie. – M: Nauka. 1986. – 516 p.
3. *Artobolevsky I.I.* Theory of mechanisms and machines – M: Nauka. 1978. – 640 p.
4. *Blekhman I.I., Dzhanalidze G.Y.* Vibrational displacement. – M: Nauka. 1968. -316 p.
5. *Selvin V.V.* The dynamics of the contact interaction of solids. – Blagoveshchensk: Publishing House of Amur of public university, 2009. – 164 p.
6. *Eliseev S.V., Markov K.K.* Some aspects of the dynamics-rye oscillatory process with unilateral constraints // Mechanics and Control. – Irkutsk: IPI, 1971. – P. 71-83.
7. *Eliseev S.V., Lotkin O.I.* Conditions of existence and breach of contact for systems with unilateral constraints // Proceedings ОмИИТ. – Omsk: ОмИИТ, 1966, Vol. 69. – P. 93-99.
8. *Gorbikov S.P., Neimark Y.I.* The major modes of motion in vibro tossing // Math. USSR "Mechanics of rigid body", 1981, № 4. – P. 39-50.
9. *Eliseev S.V., Eliseev A.V.* Modes flip of a particle on a vibrating surface in the model problem with unilateral constraints. // Modern technologies. Systems analysis. Modeling, 2012, № 3 (35). – P. 64-75.

Статья поступила в редакцию 25 сентября 2012 г.

The purpose of this work is to establish research methods mechanical systems with «not holding» ties. The problems of determining the mode of continuous flying up of a material particle from surface oscillations with the force of gravity are considered. The graphical-analytical method for determination of the mode parameters is realized. The analytical characteristics of the relations between the basic modes of continuous flying up of a

particle as a function of the parameters of the surface vibrations are identified. The proposed methodological framework can be used to research the mode of continuous flipping with additional constant force which operate from the external environment in free flight phase.

Keywords: not holding ties, interaction of a material particle with a vibrating surface, a mode of a material particle tossing with one contact.

Елисеев Сергей Викторович – доктор технических наук, профессор, директор НИИ «Современных технологий, системного анализа и моделирования» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Иркутский государственный университет путей сообщения»

Ситов Илья Сергеевич – доцент кафедры теоретической и прикладной механики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Братский государственный университет»

Елисеев Андрей Владимирович – аспирант федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Иркутский государственный университет путей сообщения»